Аккозиев И.А., Темиров К.О.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МЕТОДИКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ИНЕРЦИОННЫХ НАГРУЗОК МОСТОВЫХ КРАНОВ

УДК: 539.389.3

В статье изложена сущность идей и алгоритм методики определения горизонтальных инерционных нагрузок мостовых кранов, базирующейся на совместном использовании детерминированного метода и теории планирования экспериментов. Показаны преимущества разработанной методики и области ее применения.

In article the essence of ideas and algorithm of a technique of definition of horizontal inertial loadings of the bridge cranes, basing on sharing of the determined method and the theory of planning of experiments is stated. Advantages of the developed technique and area of its application are shown.

Мостовые краны представляют собой сложные динамические системы с большим числом степеней свободы. Движение их описывается, как правило, системой нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{f}\left(\dot{\vec{x}}, \vec{x}, \vec{c}, \vec{F}, t\right) \quad (1.1)$$

с начальными условиями

$\dot{\vec{x}}(0) = \dot{\vec{x}}_0$, $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ здесь $\vec{f}$- вектор функций правых частей системы; $\vec{x}$=(x_1,x_2,…x_n)- вектор фазовых координат системы (n - число масс); $\dot{\vec{x}}\ddot{\vec{x}}$- векторы, соответственно, первой и второй производных по времени от $\vec{x}$; $\vec{c}$ – вектор параметров системы; $\vec{F}$- вектор внешних нагрузок; t - текущее время.

Методика построения полиномиальных аппроксимирующих моделей для расчета динамических нагрузок грузоподъемных машин содержит следующие этапы:

1. Выбор расчетной схемы

В связи с тем, что для построения математической модели (т.е. функции, аппроксимирующей максимальные значения динамических нагрузок кранов) система дифференциальных уравнений (1.1) решается численным методом на ЭВМ, имеет смысл выбирать расчетную схему, наиболее полно описывающую переходной процесс. В связи с этим упрошенные расчетные схемы целесообразно усложнить введением в расчет механических характеристик привода, диссипативных сил, а также есть возможность рассматривать расчетные схемы с распределенной массой пролетного строения крана.

2. Выделение факторов, оказывающих наибольшее влияние на величину динамических нагрузок.

Опыт показывает, что в большинстве случаев (в частности при решении задач динамики кранов) этот этап можно проводить на основе анализа априорной информации. В остальных редких случаях следует применять специальные методы (например, метод случайного баланса, метод формализации априорной информации и др.). Факторы должны быть выбраны так, чтобы обязательно удовлетворялось условие совместимости и отсутствовала линейная корреляция между ними.

3. Выбор области определения и интервалов варьирования факторов на основе предварительного анализа реальных конструкций; кодирование факторов.

Сначала необходимо определить центр плана, иногда называемый основным уровнем. Центром плана является точка с координатами $x^0_1, x^0_2, \dots x^0_k$, в которой для любого фактора xi справедливо соотношение

$$x_i^o = \frac{x_{i(\max)} + x_{i(\min)}}{2} \quad (1.2)$$

где k – число факторов;
i =1,2,…,k.

Затем выбираются интервалы варьирования факторов, которые определяются по формуле

$$\Delta x_i = \frac{x_{i(\max)} + x_{i(\min)}}{2} \quad (1.3)$$

Прибавление интервала варьирования к основному уровню дает верхний, а вычитание - нижний уровни факторов. Для упрощения обработки экспериментальных данных целесообразно перейти от системы координат $x_1, x_2, \dots, x_k$ к новой безразмерной системе координат $z_1, z_2, \dots, z_k$, т.е. осуществить нормировку (кодирование) факторов с помощью преобразования

$$z_i = \frac{x_i - x_i^0}{\Delta x_i} \quad (1.4)$$

В результате кодирования факторов, верхний уровень каждого из них принимает значение (+1), нижний уровень – (–1), координаты центра плана равны нулю и совпадают с началом координат. Необходимое число уровней факторов выбирают в зависимости от порядка полиномиального уравнения. Оно должно быть по крайней мере на единицу больше, чем порядок полинома. Так, для полиномиального уравнения первого порядка число уровней факторов должно быть не менее двух, для уравнения второго порядка - не менее трех. При использовании определенных планов число уровней факторов может значительно превышать порядок уравнения. Например, в центральных композиционных планах второго порядка число уровней факторов равно пяти.

4. Выбор вида математической модели.

Для удобства практического использования целесообразно строить модель в виде алгебрических полиномов. В начале строится модель в виде полинома первого порядка

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i z_i \quad , \quad (1.5)$$

где $\hat{y}$ – оценка аппроксимирующего параметра; z_1 – варьируемые факторы (кодированные значения); b_0, b_i – коэффициенты регрессии.

Модель повторяется на адекватность (см. седьмой этап), и в случае ее неадекватности переходят к построению модели второго порядка

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i z_i + \sum_{\substack{i,l=1 \\ i=l}}^{k} b_{il} z_i z_l = \sum_{i=1}^{k} b_{ii} z_i^2$$

(1.6)

где *i* и *l* – порядковые номера факторов.

Исследования показывают, что с помощью полиномиальных моделей второго порядка удается достаточно хорошо описать динамические нагрузки металлоконструкций мостовых кранов. Поэтому модели третьего и более высоких порядков применять нецелесообразно, тем более, что они имеют большое число коэффициентов регрессии.

5. Выбор плана эксперимента

При выборе плана в случае традиционного применения методов планирования экспериментов, всегда необходимо учитывать как оптимальность плана по статистическим характеристикам, так и затраты на эксперимент и сложность обработки результатов эксперимента. Поскольку в нашем случае эксперимент и регрессионный анализ проводятся на ЭВМ, то ограничения на число опытов и сложность обработки результатов эксперимента не являются важными критериями при выборе плана. Поэтому имеет смысл использовать планы, обладающие прежде всего хорошими статистическими характеристиками.

Существует два подхода к критерию оптимальности выбираемого плана: эмпирико-интуитивный, разработанный Боксом (G.Box), и фундаментальный теоретический, развитый Кифером (J.Kiefer. В соответствии с первым подходом критериями оптимальности плана являются ортогональность и ротатабельность. Ортогональные планы, которым соответствует диагональная ковариационная матрица оценок параметров (коэффициентов полинома), весьма удобны на практике. Полученные по ортогональным планам оценки параметров независимы друг от друга, т.е. величины коэффициентов уравнения регрессии характеризуют вклад каждого фактора в величину регрессионной функции. Причем формулы для расчета коэффициентов в этом случае весьма просты. Линейным ортогональным планам, построенным, например, на шаре соответствует наименьшая дисперсия оценок коэффициентов полиномиальной модели и наименьшая максимальная дисперсия предсказанных значений функции отклика в области планирования. Однако ортогональные планы второго порядка уже не обладают свойством минимальности указанных дисперсий, поэтому при выборе ортогональности, как главного критерия оптимальности плана, неизбежны некоторые потери в точности оценок неизвестных коэффициентов и регрессионной функции. К недостаткам ортогональных планов также следует отнести то, что информация о поверхности отклика, содержащаяся в уравнении регрессии, в разных направлениях факторного пространства для эквидистантных точек различна.

Часто на практике применяются ротатабельные планы, т.е. планы, ковариационная матрица которых инвариантная к ортогональному вращению координат. Для ротатабельных планов дисперсия предсказанных значений регрессионной функции зависит только от звездного плеча (расстояния точки до центра эксперимента), при этом любое направление от центра эксперимента равнозначно в смысле точности оценки поверхности отклика. Критерий ротатабельности плана основывается на том, что областью планирования является шар. Однако на практике часто оказывается, что область изменения факторов - многомерный куб. Для выполнения свойства ротатабельности необходимо выбрать экспериментальные точки внутри шара, вписанного в куб, при этом углы куба не используются. С увеличением размерности относительный объем неиспользованных углов куба возрастает, поэтому применение ротатабельных планов в данном случае приводит к потере точности. Следовательно, для случаев, когда областью изменения факторов является многомерный куб, использование ротатабельности планов не всегда выгодно.

Второй подход к критерию оптимальности плана основывается на применении методов современного математического анализа. В работах Кифера и его последователей для выбора критерия оптимальности планов предлагается рассматривать такие характеристики, как объем эллипсоида рассеяния оценок параметров, максимальная величина дисперсии предсказанных значений функции оценок параметров и т.д. На основании этих характеристик предложен ряд критериев оптимальности планов: D -оптимальность, A - оптимальность , E - оптимальность , G - оптимальность и др. План называется D - оптимальным, если он минимизирует объем эллипсоида рассеяния оценок параметров (коэффициентов) регрессии. Объем эллипсоида рассеяния связан с определителем информационной матрицы $\left(\left|F^T F\right|\right)$ плана следующим образом:

$$V_k = \frac{(k+2)^{k/2} \pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right) \cdot \sqrt{\left|F^T F\right|}} ,$$

где $\left(\left|F^T F\right|\right)$ - гамма-функция; *F* - матрица обработки результатов эксперимента; Fў – транспонированная матрица от F. D - оптимальному плану должен соответствовать максимальный определитель информационной матрицы .

Остальные указанные критерии, как и критерий D-оптимальности, по существу сводятся к некоторым требованиям, предъявляемым к информационной $\left(\left|F^T F\right|\right)$, а следовательно, и ковариационной $\left(\left|F^T F\right|^{-1}\right)$ матрицам. Так, план называется А-оптимальным, если его ковариационная матрица имеет наименьшую сумму диагональных элементов. А-оптимальный план минимизирует среднюю дисперсию оценок параметров (коэффициентов полинома). План называется Е-оптимальным, если максимальное характеристическое значение соответствующей ему ковариационной матрицы оценок параметров минимально. Это значит, что Е-оптимальный план минимизирует максимальную ось эллипсоида рассеяния оценок параметров. План называется G-оптимальным, если он минимизирует максимальную величину дисперсии предсказанных значений функции отклика в области планирования. G - оптимальный план обеспечивает отсутствие в области планирования точек, в которых точность оценки поверхности отклика слишком низкая.

В настоящее время наиболее развита теория построения D-оптимальных и G-оптимальных планов (которые часто совпадают друг с другом). D-оптимальные планы первого порядка (для полиномов первого порядка), построенные на гиперкубе, можно задать в виде полного факторного эксперимента типа 2^k, а также в виде некоторых дробных реплик полного факторного эксперимента. Эти планы ортогональны и ротатабельны. Что же касается D-оптимальных планов второго порядка, построенных на гиперкубе для полиномов второго порядка, то они, как правило, содержат очень большое (даже для ЭВМ) число опытов. Так, например, точный D - оптимальный план, предложенный Кифером, при k=5 должен иметь более 1500 экспериментальных точек. Следовательно, точные D-оптимальные планы не всегда можно непосредственно использовать на практике. В связи с этим, математиками, возглавляемыми профессором В.В.Налимовым, построены планы второго порядка, которые близки по свойствам к D-оптимальным планам и, вместе с тем, содержат относительно наибольшое число экспериментальных точек. Эти планы (квази-D-оптимальные) по таким характеристикам, как определитель информационной матрицы, средняя и максимальная дисперсия предсказанного значения регрессионной функции, достаточно близки к D-оптимальным планам. К квази-D-оптимальным планам относятся планы типа Bk, планы Хартлы, Вестлейна и др. В качестве примера в табл.1.1. приведен план В3 для числа факторов k=3, а на рис.1.1. показано расположение опытных точек В3, которые располагаются в вершинах куба и центрах граней.

Таблица 1.1.

Матрица плана В3.

N	Z_1	Z_2	Z_3	N	Z_1	Z_2	Z_3
1	1	1	1	8	-1	-1	-1
2	1	1	-1	9	1	0	0
3	1	-1	1	10	-1	0	0
4	1	-1	-1	11	0	1	0
5	-1	1	1	12	0	-1	0
6	-1	1	-1	13	0	0	1
7	-1	-1	1	14	0	0	-1

Таким образом, для построения полиномиальной модели первого порядка целесообразно применять полный факторный эксперимент типа 2^k (при k<5), или дробную реплику 2^{k-p}, в которой ***p*** линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия. Для построения полиномиальной модели второго порядка имеет смысл применять ортогональные, ротатабельные и квази – D - оптимльные планы. При этом необходимо учитывать, что несмотря на некоторые удобные для практического применения свойства ортогональных и ротатабельных планов (и связанное с этим их широкое использование), они уступают квази-D-оптимальным планам по величине средней и максимальной дисперсий предсказанных значений функции отклика в несколько раз, а по величине определителя информационной матрицы - на много порядков. Тот или иной план, удовлетворяющий определенному критерию оптимальности, выбирается в зависимости от цели исследования и возможностей эксперимента.

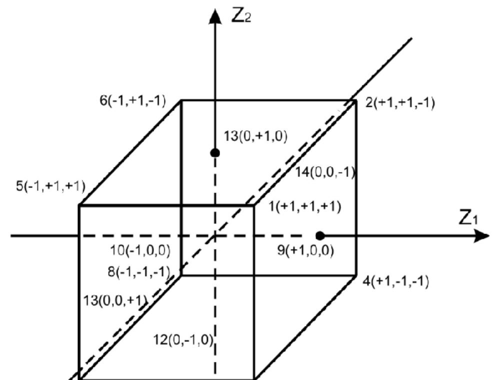

Рис.1.1. Расположение опытных точек плана эксперимента В3.

6. Проведение машинного эксперимента

В каждой точке выбранного плана необходимо определить истинные значений варьируемых факторов (т.е. коэффициентов дифференциальных уравнений движения) и решить систему (1.1) одним из численных методов на ЭВМ. Максимальное значение динамических нагрузок, определяемое методом сравнения на каждом шаге интегрирования, принимается в качестве результата эксперимента в данной точке.

Предлагаемая методика позволяет рассчитывать динамические нагрузки группы кранов, параметры (факторы) которых находятся в рассмотренных интервалах варьирования (например, мостовые краны какой-либо грузоподъемности всех пролетов). В таком виде, в котором методика представлена в данном разделе, она может быть использована для расчета самых разнообразных динамических нагрузок (в элементах привода, металлоконструкции, грузовых канатов и т.д.) различных грузоподъемных машин (далее рассматривается только динамические нагрузки металлоконструкции мостовых кранов).

Литература:

1. *Будиков. Л.Я.*Исследование динамики подъема мостовых кранов. В кн.: Конструирование и пр-во трансп. машин. Харьков. Вища школа, 1981. с. 51-56.

2. *Налимов В.В., Чернова Н.А.* Статические методы планирования экстремальных экспериментов. - М.: Наука, 1965. - 340 с.

3. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов/ *К. Хартман, Э. Лецкий, В. Шеффер.* - М.: Мир, 1977. 552 с.